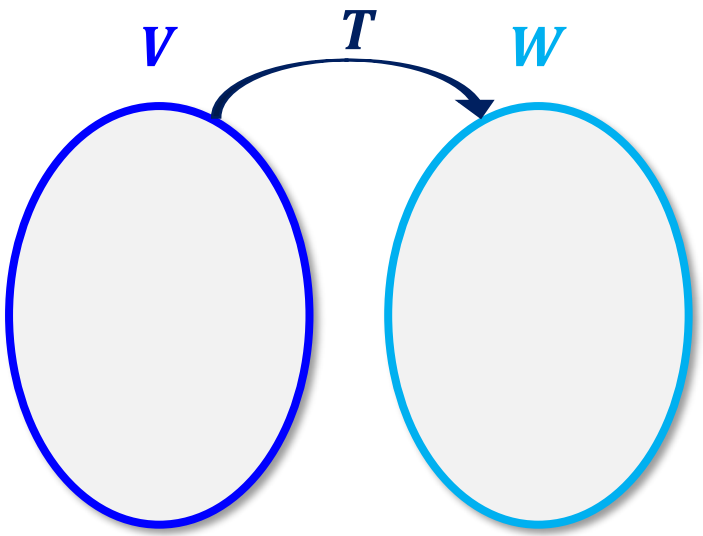
אלגברה לינארית 2

הרצאה 1

שרון גל sharon.gal.math@gmail.com



הגדרה:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ פונקציה (טרנספורמציה, העתקה).

נאמר ש-T היא **העתקה לינארית** אם לכל $v_1,v_2 \in V$ ולכל $\alpha_1,\alpha_2 \in F$

מתקיים:

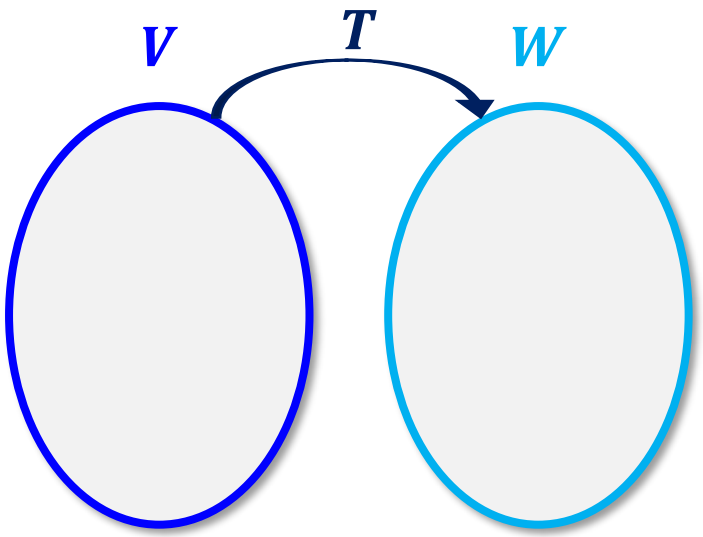
$$\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)}$$

לתכונה זו נקרא לינאריות.

הגדרה:

העתקה לינארית $T: V \to V$ נקראת גם **אופרטור לינארי**.

העתקה לינארית - *Linear Transformation*



הערה 1:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. אזי:

1. לכל $v_1,v_2 \in V$ מתקיים: $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
2. לכל $\alpha \in F$, $v \in V$ מתקיים: $T(\alpha v)=\alpha T(v)$
3. לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in F$, $v_1,\dots v_k \in V$ מתקיים:

$$\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k)=\alpha_1 T(v_1)+\cdots+\alpha_k T(v_k)}$$

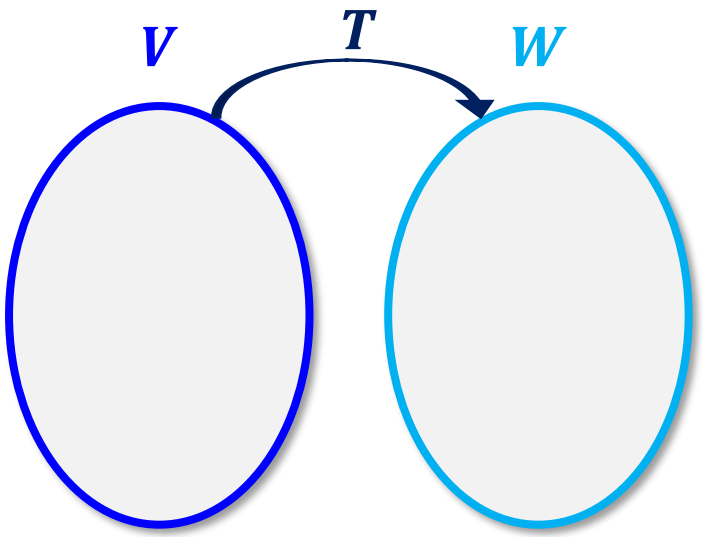
הסבר:

1. יהיו $v_1,v_2 \in V$.

$$\boldsymbol{T(v_1+v_2)} \underset{\text{תכונת } 1_F}{=} T(1_F v_1+1_F v_2) \underset{\text{לינאריות}}{=} 1_F\cdot T(v_1)+1_F\cdot T(v_2) \underset{\text{תכונת } 1_F}{=} \boldsymbol{T(v_1)+T(v_2)}$$

לינאריות:

$$\boxed{\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)}}$$



הערה 1:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. אזי:

1. לכל $v_1,v_2 \in V$ מתקיים: $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
2. לכל $\alpha \in \mathrm{F}$, $v \in V$ מתקיים: $T(\alpha v)=\alpha T(v)$
3. לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathrm{F}$, $v_1,\dots v_k \in V$ מתקיים:

$$\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k)=\alpha_1 T(v_1)+\cdots+\alpha_k T(v_k)}$$

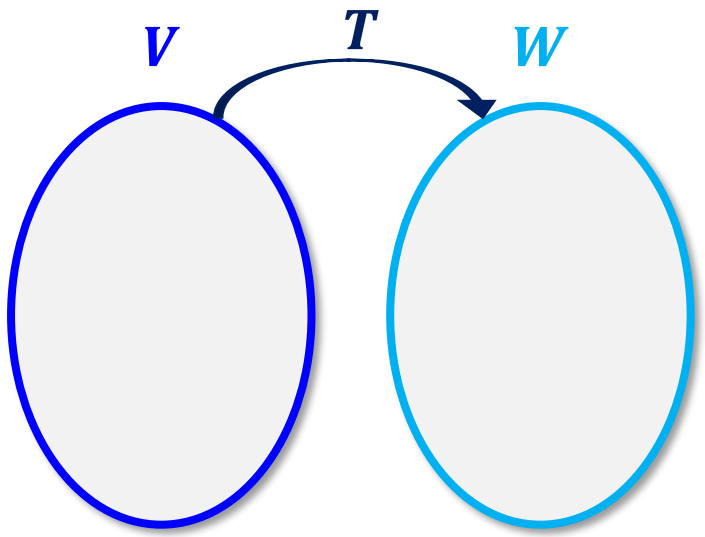
הסבר:

2. יהיו $v \in V, \alpha \in \mathrm{F}$.

$$\boldsymbol{T(\alpha v)} \underset{\text{תכונת } 0_F}{=} T(\alpha v+0_F v) \underset{\text{לינאריות}}{=} \alpha\cdot T(v)+0_F\cdot \underbrace{T(v)}_{\in W} \underset{\text{תכונת } 0_F}{=} \alpha\cdot T(v)+0_W \underset{\text{תכונת } 0_W}{=} \boldsymbol{\alpha T(v)}$$

לינאריות:

$$\boxed{\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)}}$$



הערה 1:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. אזי:

1. לכל $v_1,v_2 \in V$ מתקיים: $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
2. לכל $\alpha \in F$, $v \in V$ מתקיים: $T(\alpha v)=\alpha T(v)$
3. לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in F$, $v_1,\dots v_k \in V$ מתקיים:

הע'

$$\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_k v_k)=\alpha_1 T(v_1)+\cdots+\alpha_k T(v_k)}$$

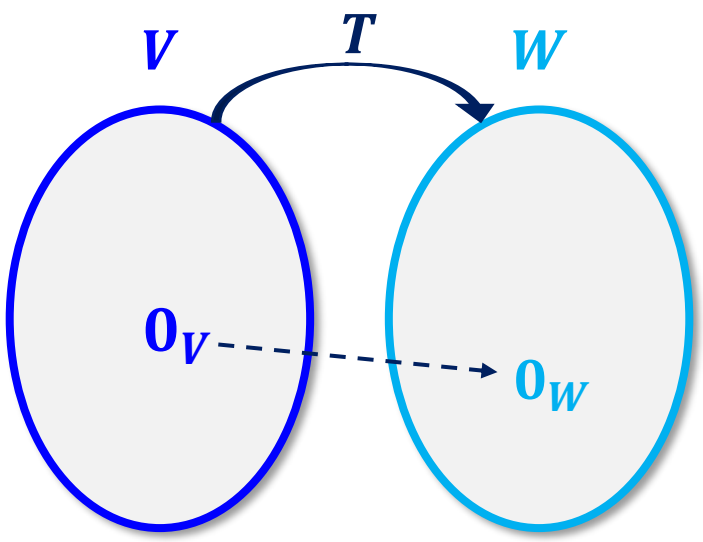
הסבר:

3. באינדוקציה.

$\exists k+3$ $\quad T\big(\underbrace{(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k)}_{1}+\underbrace{\alpha_{k+1}v_{k+1}}_{2}\big)=\dots$

לבד ☺

לינאריות: $\boxed{\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)}}$



0 תמיד עובר ל-0!

משפט 1:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. אזי: $\boldsymbol{T(0_V) = 0_W}$

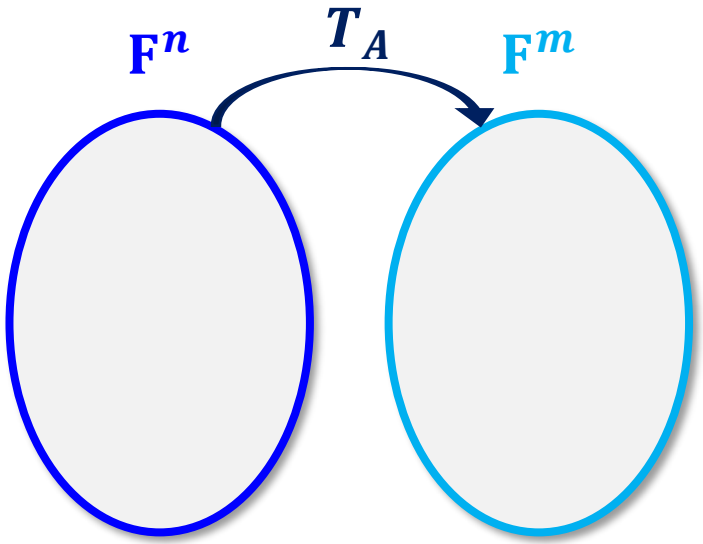
הוכחה:

$$\boldsymbol{T(0_V)} \underset{\text{תכונת } 0_F,0_V}{=} T(0_F \cdot 0_V) \underset{\text{לינאריות}}{=} 0_F \cdot \overbrace{T(0_V)}^{\in W} \underset{\text{תכונת } 0_F}{=} \boldsymbol{0_W}$$

לינאריות:

$$\boldsymbol{T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)}$$

T_A פשוט מכפילה במטריצה A.



הגדרה:

יהי F שדה. תהי $A \in M_{m\times n}(F)$.

נגדיר את ההעתקה $T_A: F^n \to F^m$ באופן הבא: $\forall \vec{x} \in F^n$: $\underbrace{T_A(\vec{x})}_{(m\times 1)} = \underbrace{A}_{(m\times n)}\underbrace{\vec{x}}_{(n\times 1)}$

$$\boxed{(m\times 1) = (m\times n)\cdot(n\times 1)}$$

משפט 2:

יהי F שדה. תהי $A \in M_{m\times n}(F)$.

אזי ההעתקה T_A היא העתקה לינארית.

הוכחה: יהיו $\vec{x},\vec{y} \in F^n$ ויהיו $\alpha,\beta \in F$.

$$\boxed{T_A(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) =} A\cdot(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = A\cdot(\alpha\vec{x}) + A\cdot(\beta\vec{y}) = \alpha\cdot(A\vec{x}) + \beta\cdot(A\vec{y}) = \boxed{\alpha T_A(\vec{x}) + \beta T_A(\vec{y})}$$

הגדרת T_A — פילוג בכפל מטריצות — תכונות כפל מטריצות — הגדרת T_A

דוגמה 1:

תהי $T:(\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ העתקה המוגדרת כך:

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x+3y}\\ \boldsymbol{z-x+4y}\end{pmatrix} \text{ לכל } \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)^3.$$

- הוכיחו ש-T העתקה לינארית.

- נתבונן במטריצה: $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

מה ה- $\mathbb{Z}_5$?

- נשים לב שלכל $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_5)^3$ מתקיים:

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

- לכן $T = T_A$ ולפי משפט 2 היא העתקה לינארית.

דוגמה 2:

תהי $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ העתקה המוגדרת כך:

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z_1}\\ \boldsymbol{z_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{z_1+iz_2}\\ \boldsymbol{iz_1-z_2}\end{pmatrix} \text{ לכל } \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

- הוכיחו ש-T העתקה לינארית.

- נתבונן במטריצה: $A = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$

- נשים לב שלכל $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ מתקיים:

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z_1}\\ \boldsymbol{z_2}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

- לכן $T = T_A$ ולפי משפט 2 היא העתקה לינארית.

דוגמה 3:

תהי $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ העתקה המוגדרת כך:

$$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 \\ iz_1 - z_2 + 1 \end{pmatrix}$$ לכל $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

- הוכיחו ש-T **אינה** העתקה לינארית.

- נניח בשלילה ש-T היא העתקה לינארית.
- לכן לפי משפט 1: $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- אבל מהגדרת T: $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

סתירה.

דוגמה 4:

תהי $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקה המוגדרת כך:

$T(z) = \bar{z}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

- הוכיחו ש-T **אינה** העתקה לינארית.

(כשבא כגורם אתפל חיב לגיות ℂ)

- נניח בשלילה ש-T היא העתקה לינארית.
- מצד אחד: $T(i \cdot i) = T(-1) = \overline{-1} = -1$

  הגדרת T
- מצד שני:

$$T(i \cdot i) = iT(i) = i \cdot \bar{i} = i \cdot -i = 1$$

T ה"ל הגדרת T

סתירה.

תכונות של צמודים:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{\alpha z} = \overline{\alpha} \cdot \overline{z}$$

דוגמה 5:

תהי $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקה המוגדרת כך:

$\boldsymbol{T(z) = \overline{z}}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

- הוכיחו שאם $\mathbb{C}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אז T **כן** ה"ל.

$\mathbb{R}$-ל הצמוד שונה מאמ' אמיתי

$7 + 0i$ אמיתי

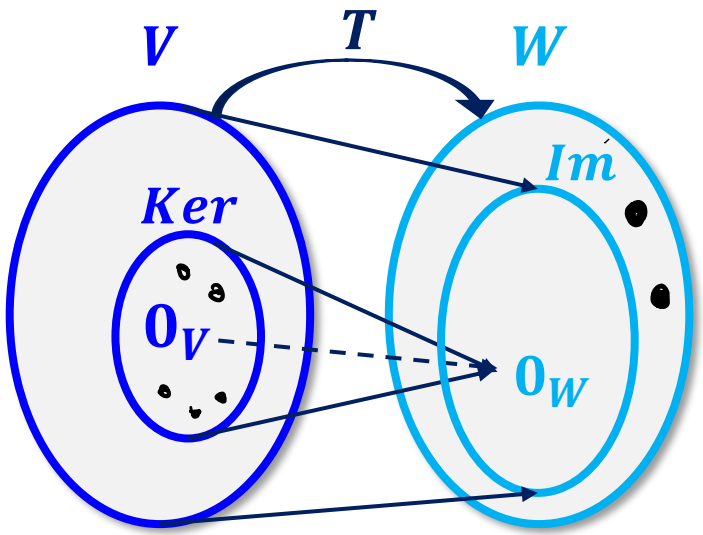
$7 - 0i$ אמיתי

הוכחה:

- יהיו $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{T(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) =} \overline{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{z_1} + \overline{\alpha_2} \cdot \overline{z_2} = \alpha_1 \cdot \overline{z_1} + \alpha_2 \cdot \overline{z_2} = \boxed{\alpha_1 T(z_1) + \alpha_2 T(z_2)}$$

הגדרת T — תכונת צמוד — $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ — הגדרת T



הגדרות:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

נגדיר את **הגרעין** של T באופן הבא:

$$\boldsymbol{Ker(T)} = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$$

נגדיר את **התמונה** של T באופן הבא:

$$\boldsymbol{Im(T)} = \{T(v) \mid v \in V\} =$$

$$= \{w \in W \mid \exists v \in V (T(v) = w)\}$$

$$\boldsymbol{KerT \subseteq V} \quad , \quad \boldsymbol{ImT \subseteq W}$$

הגרעין של ההעתקה הוא קבוצת כל הוקטורים בתחום שעוברים ל-0 בטווח.

התמונה של ההעתקה היא קבוצת כל הוקטורים בטווח שיש להם מקור בתחום.

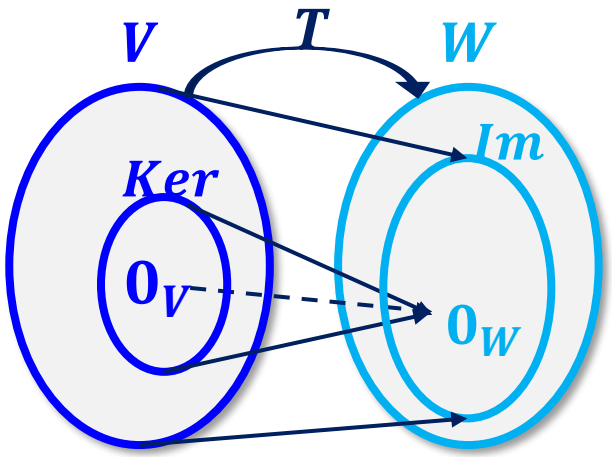
Image - תמונה *Kernel* - גרעין

תזכורת: U תמ"ו של W אם:

$\forall w_1, w_2 \in W, \forall \alpha, \beta \in F$

(1) $0_W \in U$

(2) $w_1, w_2 \in U \rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in U$



משפט 3:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

אזי: הגרעין של T $(KerT)$ הוא תמ"ו של V.

הוכחה:

(1) $T(0_V) = 0_W$ ← משפט 1

$\boxed{0_V \in KerT}$

(2) יהיו $v_1, v_2 \in KerT$ ויהיו $\alpha, \beta \in F$.

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = 0_W$$

לינאריות T — הגדרת $KerT$

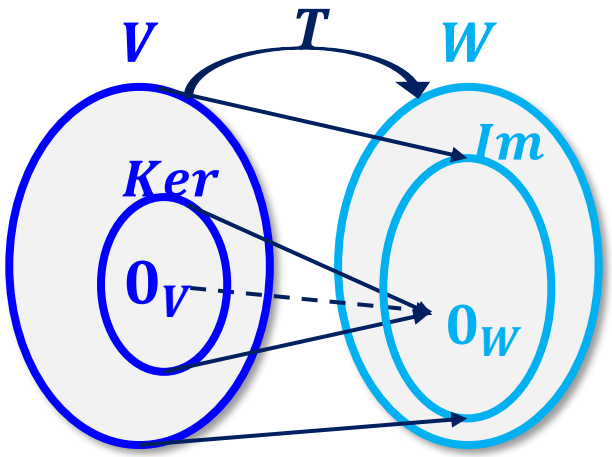
$\boxed{\alpha v_1 + \beta v_2 \in KerT}$

תזכורת: U תמ"ו של W אם:

$\forall w_1, w_2 \in W, \forall \alpha, \beta \in F$

(1) $0_W \in U$

(2) $w_1, w_2 \in U \rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in U$



משפט 4:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

אזי: התמונה של T (ImT) היא תמ"ו.

הוכחה:

(1) $\boxed{0_W} = T(0_V) \boxed{\in ImT}$

משפט 1

(2) יהיו $w_1,w_2 \in ImT$ ויהיו $\alpha,\beta \in F$.

- מכיוון ש- $w_1 \in Im(T)$ קיים $v_1 \in V$ כך ש- $T(v_1) = w_1$
- מכיוון ש- $w_2 \in Im(T)$ קיים $v_2 \in V$ כך ש- $T(v_2) = w_2$
- לכן: $\boxed{\alpha w_1 + \beta w_2} = \underbrace{\alpha T(v_1) + \beta T(v_2)} = T(\underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{\in V}) \boxed{\in ImT}$

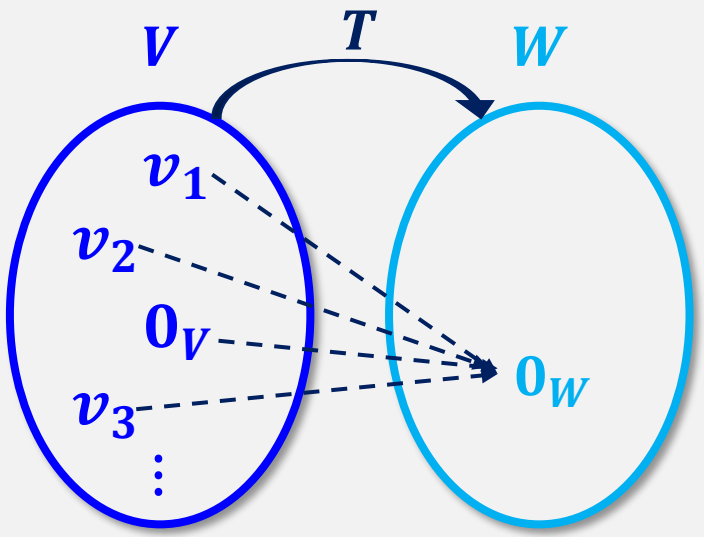
הגדרת w_1,w_2 לינאריות T

הגדרות:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

נגדיר את **העתקת האפס** $T: V \to W$ באופן הבא:

לכל $v \in V$ מתקיים $\boldsymbol{T(v) = 0_W}$.

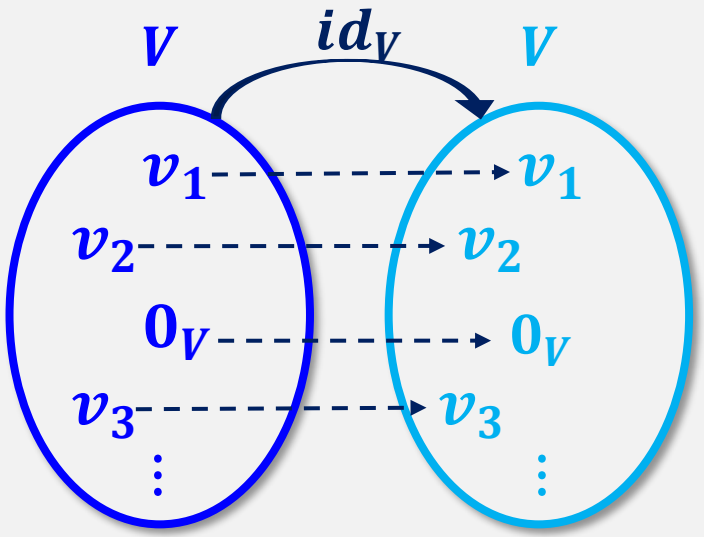


$$\boldsymbol{KerT = V\,,ImT = \{0_W\}}$$

The Zero Transformation

נגדיר את **העתקת הזהות** $id_V: V \to V$ באופן הבא:

לכל $v \in V$ מתקיים $\boldsymbol{id_V(v) = v}$.



$$\boldsymbol{Ker(id_V) = \{0_V\}\,,Im(id_V) = V}$$

The Identity Transformation

משפט 5:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F.

ותהי $T: V \to W$ העתקת האפס. אזי T העתקה לינארית.

לינאריות:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

הוכחה:

- יהיו $v_1,v_2 \in V$ ויהיו $\alpha_1,\alpha_2 \in F$.

$$\boxed{T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =} \; 0_W = \alpha_1 0_W + \alpha_2 0_W = \boxed{\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)}$$

הגדרת T — תכונת 0_W — הגדרת T

משפט 6:

יהי F שדה ויהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

אזי id_V העתקה לינארית.

לינאריות:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

הוכחה:

- יהיו $v_1, v_2 \in V$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

$$\boxed{id_V(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \boxed{\alpha_1 \overbrace{id_V(v_1)}^{v_1} + \alpha_2 \overbrace{id_V(v_2)}^{v_2}}$$

הגדרת T הגדרת T

הגדרה:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. תהיינה $T,S: V \to W$ העתקות לינארית.

נגדיר: $\forall v \in V: \quad (S \pm T)(v) = S(v) \pm T(v)$

$\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathrm{F}: \quad (\alpha T)(v) = \alpha T(v)$

משפט 7 (אריתמטיקה של העתקות לינאריות):

- יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. תהיינה $T,S: V \to W$ העתקות לינארית.
- יהיו $\alpha,\beta \in \mathrm{F}$. אזי: $\alpha T + \beta S$ **העתקה לינארית.**

צירוף לינארי של העתקות לינאריות הוא העתקה לינארית.

הוכחה: יהיו $v_1,v_2 \in V$ ויהיו $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathrm{F}$. נוכיח:

$$\overbrace{(\alpha T + \beta S)}^{K}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \overbrace{(\alpha T + \beta S)}^{K}(v_1) + \alpha_2 \overbrace{(\alpha T + \beta S)}^{K}(v_2)$$

AOLT (Arithmetic of linear transformation)

1. $(S+T)(v) = S(v) + T(v)$
2. $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$

הוכחה:

$$\boxed{(\alpha T + \beta S)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =}$$

הגדרה 1 $= (\alpha T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + (\beta S)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$

הגדרה 2 $= \alpha \cdot T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \beta \cdot S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$

S,T ה"ל (לינאריות) $= \alpha(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)) + \beta(\alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2)) =$

פתיחת סוגריים $= \alpha\alpha_1 T(v_1) + \alpha\alpha_2 T(v_2) + \beta\alpha_1 S(v_1) + \beta\alpha_2 S(v_2) =$

הוצאת גורמים לפי α_1,α_2 $= \alpha_1\big(\alpha T(v_1) + \beta S(v_1)\big) + \alpha_2\big(\alpha T(v_2) + \beta S(v_2)\big) =$

הגדרות 1,2 $\boxed{= \alpha_1(\alpha T + \beta S)(v_1) + \alpha_2(\alpha T + \beta S)(v_2)}$

הגדרה:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

נגדיר $\boldsymbol{Hom(V,W) = \{T: V \to W \mid T \text{ is a linear trans.}\}}$

$Hom(V,W)$ היא קבוצת כל ההעתקות הלינאריות מ-V ל-W.

Hom זה קיצור של $Homomorphism$ (הומומורפיזם) - העתקה בין מבנים אלגבריים המשמרת את תכונות המבנה.

W^V היא קבוצת כל הפונקציות מ-V ל-W.

מסקנה 1:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

אזי $Hom(V,W)$ הוא תמ"ו של W^V.

הוכחה:

- תהיינה $S,T \in Hom(V,W)$ ויהיו $\alpha,\beta \in F$.
- לפי משפט 7 (אריתמטיקה של העתקות לינאריות) $Hom(V,W)$ סגורה לצ"ל של העתקות.

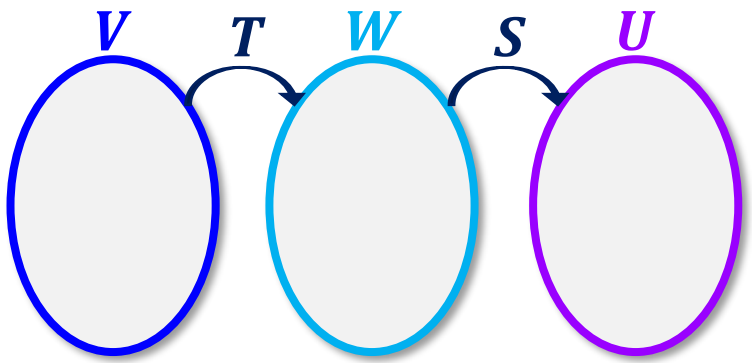
  (כלומר $\alpha T + \beta S \in Hom(V,W)$).
- כמו כן הוכחנו שהעתקת האפס היא לינארית ולכן שייכת ל-$Hom(V,W)$.

תזכורת (הרכבת פונקציות):

עבור פונקציות $f: A \to B$,$g: B \to C$

ההרכבה $g \circ f: A \to C$ היא פונקציה

המוגדרת כך: $g \circ f(x) = g(f(x))$.



משפט 8:

יהי F שדה ויהיו V,W,U מרחבים וקטוריים מעל F.

תהיינה $S: W \to U$, $T: V \to W$ העתקות לינאריות.

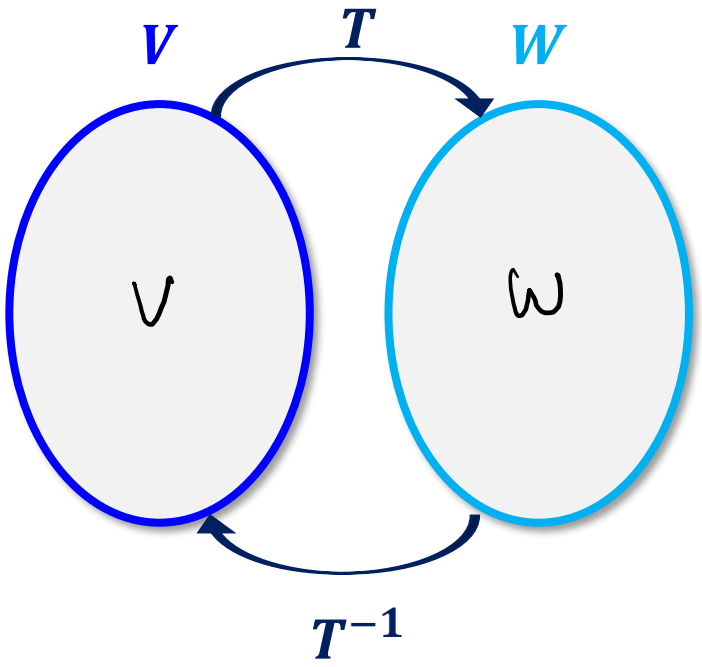
אזי $S \circ T$ **היא העתקה לינארית**.

הוכחה:

- מהגדרת הרכבת פונקציות מתקיים: $S \circ T: V \to U$.
- יהיו $v_1,v_2 \in V$ ו-$\alpha_1,\alpha_2 \in F$. אזי:

$$\boxed{(S \circ T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)} \underset{\text{הגדרת הרכבה}}{=} S(T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \underset{\text{ה"ל } T}{=} S(\alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{w_1} + \alpha_2 \underbrace{T(v_2)}_{w_2}) \underset{\text{ה"ל } S}{=}$$

$$= \alpha_1 S(\underbrace{T(v_1)}_{w_1}) + \alpha_2 S(\underbrace{T(v_2)}_{w_2}) \underset{\text{הגדרת הרכבה}}{=} \boxed{\alpha_1 (S \circ T)(v_1) + \alpha_2 (S \circ T)(v_2)}$$



הגדרה (תזכורת):

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. תהי $T: V \to W$.

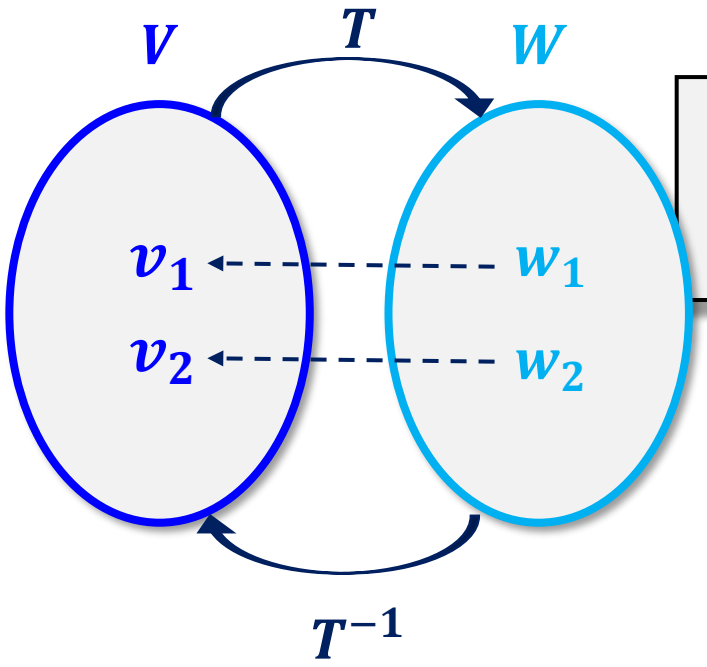
נאמר ש-T **הפיכה** אם:

1. **T חח"ע** - לכל $v_1,v_2 \in V$ המקיימים $T(v_1) = T(v_2)$ מתקיים $v_1 = v_2$.
2. **T על** - $ImT = W$ (או: לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך ש-$T(v) = w$)

הערה:

- אם $T: V \to W$ הפיכה אז יש לה הופכית $T^{-1}: W \to V$ המוגדרת כך:
- $\forall v \in V, \forall w \in W$: $\boldsymbol{T(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1}(w) = v}$

Onto, Surjective - על , ***1 to 1 ,Injective*** - חח"ע , ***Invertible*** - הפיכה



משפט 9:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

נניח ש-T הפיכה. אזי **T^{-1} היא העתקה לינארית.**

הוכחה:

- ראשית, נשים לב שמתקיים: $T^{-1}: W \to V$.
- יהיו $w_1,w_2 \in W$ ו-$\alpha_1,\alpha_2 \in$ F.
- נסמן $v_1 = T^{-1}(w_1)$, $v_2 = T^{-1}(w_2)$.
- מהיות T ה"ל מתקיים:

$$\boxed{T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)} \underset{\text{ה"ל } T}{=} \alpha_1 \overbrace{T(v_1)}^{w_1} + \alpha_2 \overbrace{T(v_2)}^{w_2} \underset{\text{הגדרת } v_1,v_2}{=} \boxed{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}$$

$$\boxed{T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)} \underset{\text{שורה קודמת}}{=} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \underset{\text{הגדרת } v_1,v_2}{=} \boxed{\alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2 T^{-1}(w_2)}$$

בהעתקה חח"ע
רק 0 עובר ל-0!

משפט 10:

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

אזי T **חח"ע אם"ם** $\boldsymbol{KerT = \{0_V\}}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ **נניח:** T חח"ע. **נוכיח:** $KerT = \{0_V\}$.

- יהי $v \in KerT$.
- מכאן ש-$T(v) = 0_W$.
- כמו כן ידוע $T(0_V) = 0_W$ (משפט 1).
- לכן $T(v) = T(0_V)$.
- מהיות T חח"ע נסיק $v = 0_V$.
- לכן $KerT = \{0_V\}$.

$\Rightarrow$ **נניח:** $KerT = \{0_V\}$. **נוכיח:** T חח"ע.

- יהיו $v_1,v_2 \in V$ המקיימים $T(v_1) = T(v_2)$.
- לכן $T(v_1) - T(v_2) = 0_W$.
- T ה"ל, לכן מתקיים $T(v_1 - v_2) = 0_W$.
- מכאן ש-$v_1 - v_2 \in KerT$.
- מההנחה נובע ש-$v_1 - v_2 = 0_V$.
- לכן $v_1 = v_2$.

שימו לב:

$T(v_1), \dots, T(v_m)$ לא בהכרח פורשים את W.

משפט 11 (פורשת לפורשת):

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

יהיו $v_1, \dots, v_m \in V$ וקטורים שפורשים את V.

אזי $T(v_1), \dots, T(v_m)$ פורשים את ImT.

הוכחה:

- יהי $w \in ImT$. ← **נרצה להראות ש-w הוא צ"ל של $T(v_1), \dots, T(v_m)$**
- לכן קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = w$.
- מכך ש-$v_1, \dots, v_m$ פורשים את V נסיק שקיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$
- לכן:

$$\boxed{w =} \; T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) = \boxed{\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_m T(v_m)}$$

הגדרת w — הגדרת v — ה"ל T

משפט 12 (בת"ל לבת"ל):

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית **חח"ע**.

יהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים בת"ל. אזי $\boldsymbol{T(v_1), \dots, T(v_k)}$ **בת"ל.**

הוכחה:

- יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ כך שמתקיים: $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = 0_W$ ← **נרצה להוכיח ש-$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0_F$**
- T ה"ל, לכן: $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0_W$
- לכן: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in KerT$
- מהיות T **חח"ע** (משפט 10) מתקיים: $KerT = \{0_V\}$
- לכן: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V$
- אבל ידוע ש-$v_1, \dots, v_k$ בת"ל, לכן: $\boxed{\boldsymbol{\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0_F}}$

T הפיכה אם"ם היא מעתיקה בסיס לבסיס.

משפט 13 (בסיס לבסיס):

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס ל-V.

אזי **T הפיכה אם"ם $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בסיס של W.**

הוכחה:

$\Leftarrow$ **נניח:** T הפיכה. **נוכיח:** $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בסיס של W.

- מהיות $v_1, \dots, v_n$ בסיס, הרי שבפרט $v_1, \dots, v_n$ בת"ל.
- מכיוון ש-T חח"ע, הרי שלפי משפט 12 גם $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.
- כמו כן, מהיות $v_1, \dots, v_n$ בסיס, הרי שבפרט $v_1, \dots, v_n$ פורשים את V.
- ממשפט 11, $T(v_1), \dots, T(v_n)$ פורשים את ImT.
- אבל T על, כלומר $ImT = W$ לכן $T(v_1), \dots, T(v_n)$ פורשים את W.
- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ קבוצה פורשת ובת"ל ולכן היא בסיס ל-W.

משפט 13 (בסיס לבסיס):

יהי F שדה ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית.

יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס ל-V.

אזי **T הפיכה אם"ם $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בסיס של W.**

הוכחה:

$\Rightarrow$ **נניח:** $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בסיס של W. **נוכיח:** T הפיכה.

נוכיח ש-T על: (נראה $ImT = W$)

- מכיוון ש-$v_1, \dots, v_n$ פורשים את V, הרי שלפי משפט 11:

$$ImT = span\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$$

- מההנחה: $W = span\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$.
- מכאן ש-$ImT = W$ ו-T על.

נוכיח ש-T חח"ע: (מספיק להראות $KerT = \{0_V\}$)

- יהי $v \in KerT$.
- מכיוון ש - $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V, קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ כך ש-$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.
- לכן: $0_W = \boxed{T(v)} = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n)$
- מכיוון ש-$T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל, הרי ש-

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_F$$

- לכן: $v = 0_F v_1 + \dots + 0_F v_n = 0_v$
- כלומר $KerT = \{0_V\}$

תרגיל 1:

הוכיחו או הפריכו:

קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad,\quad T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

הפרכה:

- נניח בשלילה שקיימת ה"ל כנ"ל.
- מתקיים:

$$T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\underbrace{T\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}_{T\text{ ה"ל}}=2\cdot T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

- בסתירה לכך ש-$T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

תרגיל 2:

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

א. חשבו את $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\underbrace{T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}_{T\text{ ה"ל}}=T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

תרגיל 2:

תהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ב. מצאו בסיס ומימד עבור $Im(T)$.

- ראשית, נשים לב שהוקטורים $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$:
- זאת מכיוון ש- $\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=1$.

משולשית עליונה

בלגן שלה בסיס

- מכיוון שהוקטורים הללו פורשים את $\mathbb{R}^3$.

- לפי משפט "פורשת לפורשת", התמונות שלהם פורשות את $Im(T)$:

$$Im(T)=span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- מתקיים: $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\cdots=-1$

חישוב ישיר

- לכן הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל.
- לכן $\mathrm{Im(T)}=\mathbb{R}^3$, בסיס אפשרי הוא $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ והמימד 3.

תרגיל 2:

תהי $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ג. הוכיחו או הפריכו: **(T לא חח"ע)**

קיים $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(\vec{x})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

הפרכה:

- ראינו בסעיף הקודם שהוקטורים $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ הם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ וגם תמונתם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.
- לפי משפט "בסיס לבסיס" נוכל להסיק ש-T הפיכה ובפרט חח"ע.
- ממשפט 10, $Ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$
- מכך ומהגדרת $Ker(T)$ לא קיים $\vec{x}$ כנדרש.

תרגיל 3 (לקריאה עצמית):

תהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה המוגדרת כך:

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \text{ לכל } \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

לכן $T = T_A$ ומכאן שהיא ה״ל.

מצאו בסיסים ל-$ImT, KerT$.

פתרון:

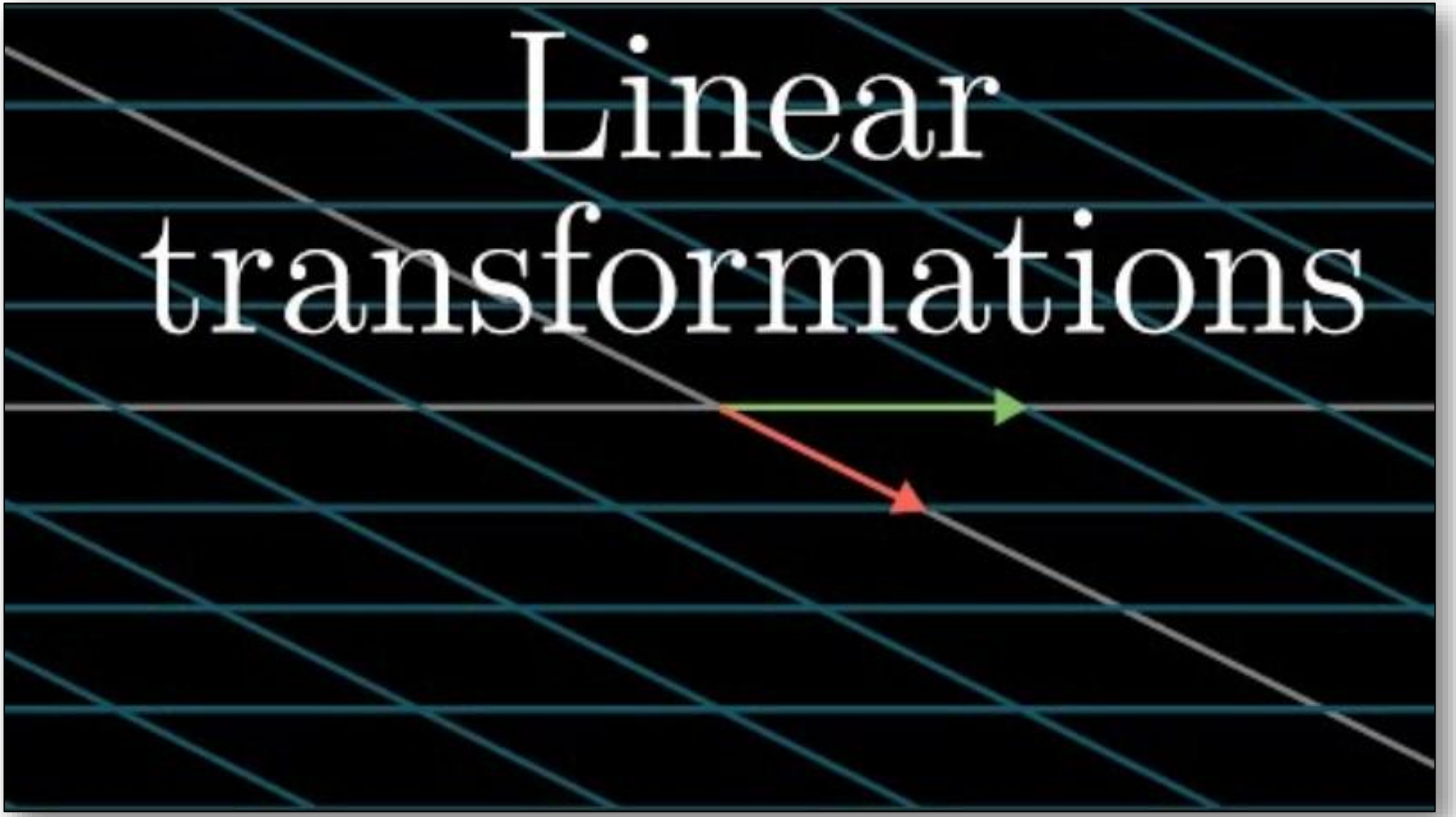
$$\boldsymbol{ImT} \underset{\text{משפט 11}}{=} span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \underset{\text{הגדרת } T}{=}$$

$$= span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

- לכן $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}}$ מהווה בסיס לתמונה.

$$\boldsymbol{kerT} \underset{\text{הגדרת } ker}{=} \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

- זו קבוצת כל הפתרונות למערכת ההומוגנית הנ״ל.
- במקום לפתור נשים לב שהמטריצה A הפיכה.
- לכן למערכת יש פתרון יחיד - $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- כלומר הגרעין הוא $kerT = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$
- ולכן הבסיס שלו הוא $\boxed{\emptyset}$.

המחשה גיאומטרית